

8. cvičení - Limity funkcí, postupností a Heineova veta

Příklad 1. Pomocí Heineho věty následující limity spočtěte, nebo dokažte, že neexistují.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \cotan\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n+\cos \frac{3}{n}}}{\sqrt[6]{n^2+\sin \frac{2}{n}} - \sqrt[3]{n}}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{n^2+\sin^2 n} - \sqrt{n^2-\cos^2 n}}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}\right)}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log\left(\frac{1}{x} + \frac{\sin x}{2x}\right)$

Příklad 2. Další rukou řešené limity postupnosti skúškovej náročnosti.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} + n^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n - \sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt[3]{n+\sqrt{n}} - \sqrt[3]{n}}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^n} \cdot \frac{2^n + 2 \cdot n^2 \sqrt{n+1}}{2^n + 2^{n-2}}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2^{n+2} - \sqrt{n+2}}{2^n + \sqrt{n}} \right] \cdot \frac{1 - \frac{2}{\pi} \arctan n}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)}$, použite, že $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan(x)\right) = \frac{2}{\pi}$ viz. vzorové riešenie

Příklad 3. Další rukou řešené limity funkcie skúškovej náročnosti.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4^{(2^x)} - 16}{\sqrt{1 - \cos(2\pi x)}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(8^x + 4^x + 2^x + 1) \cdot \cotg(2/x) \cdot (\sqrt{x^6 + x + 3} - \sqrt{x^6 - x - 3})$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x + \frac{1}{x}}{2}\right)^{\cotg^2(\pi x)}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(x)\right)^{\frac{\pi}{x \operatorname{arccotg}^2(x)}}$

